I, Stephen Matthew Grimes, hereby certify that I translated the attached document from Hungarian into English and that, to the best of my ability, it is a true and correct translation. I further certify that I am competent in both Hungarian and English to render and certify such translation.

Stephen M Grimes
FULL LEGAL NAME

Sworn to before me this 9th day of March 2016.

Mary Ann Clarke
Notary Public

COMMONWEALTH OF PENNSYLVANIA
NOTARIAL SEAL
Mary Ann Clarke, Notary Public
City of Philadelphia, Philadelphia County
My commission expires November 14, 2019

EXHIBIT
Ex. 1016

Ára: 14,— Ft
Évi előfizetés: 2...

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat beérkezett: 1978 V. 16 — Terjedelem: 17,85 (A/5) ív
78-2482 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József

INDEX: 25...
ISSN 0025-...

Math.

12

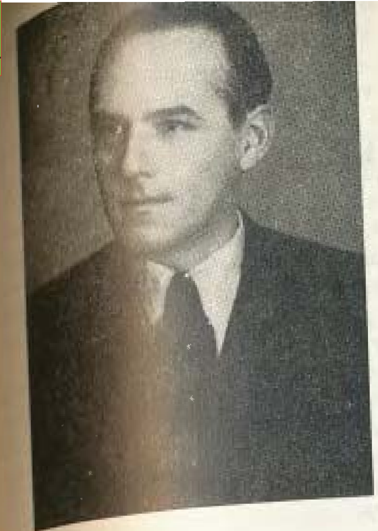
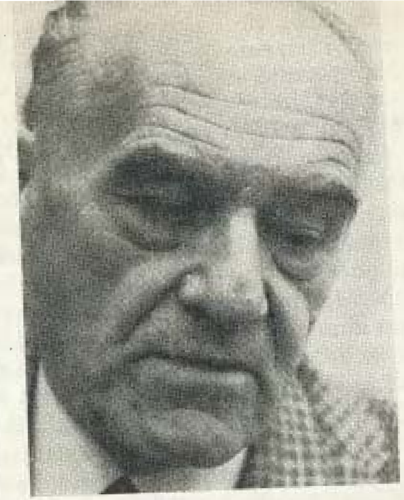
Matematikai Lapok

Bolyai János
Matematikai
Társulat
Budapest

27. évfolyam, 1976—1979 3-4

Felelős szerkesztő: Császár Ákos
Szerkesztők: Lovász László, Pelikán József, Révész Pál, Rapcsák András.
Szerkesztőség: Budapest, V., Anker-köz 1—3. Telefon: 427-741.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány utca 21.
Telefon: 111-010.
A kiadvány előfizethető a POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODÁNÁL, Budapest, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban.* Pénzforgalmi jelzőszám: PKHI 215-96162.
Előfizethető és példányonként megvásárolható
az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest, V., Alkotmány u. 21.
Telefon: 111-010. Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488,
az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTBAN: Budapest, V., Váci u. 22. ‌ on: 185-612.
Előfizetési díj egy évre 28, Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

ALEXITS GYÖRGY

(1899. január 5.—1978. október 14.)

A magyar matematikusok Nesztorának nyolcvanadik születésnapját készültünk ünnepelni, s fájó megdöbbenéssel vettük a lesujtó hírt: bensőséges ünnep helyett csak emlékülést tarthatunk. Elvesztettük a matematikai analízis nemzetközileg megbecsült kutatóját, matematikus nemzedékek nevelőjét, a tudománypolitika fáradhatatlan harcosát, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökét, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagját: elvesztettük Alexits Györgyöt.*

Pályája, mint annyi kortársáé, a legsúlyosabb nehézségek között, a maradi irodalom elleni harcokban, létbizonytalanságban indult. Az érettségi után frontszolgálat, hazatérve lelkes bekapcsolódás a Szocialista Diákok Szövetségének munkájába, a Tanácsköztársaság bukása után kizáratás az egyetemről, emigráció, egyetemi tanulmányok és doktorátus Grácban, amely itthon semmiféle képesítést nem jelentett: ez volt a kezdet. Próbálkozások a legkülönfélébb foglalkozásokkal, egy év Romániában egyetemi előadóként, míg végre engedélyt kaphatott, hogy tanári oklevelet szerezzen. Már harminc éves, mikor polgári iskolai helyettes tanárként alkalmazzák, s újabb két év telik el, míg rendes tanári kinevezést kap. Eközben megindul matematikai kutató munkája a görbeelmélet területén, s oly kiváló eredménnyel, hogy meghívást kap Bécsbe, hogy ott előadást tartson. Ez végre itthon is felhívja rá a figyelmet, középiskolai beosztást kap, majd — már 42 évesen — középiskolai tanári kinevezést, lehetőséget előadások tartására a budapesti műszaki egyetemen, s végre magántanári címet.

* Alexits Gyögy tudományos munkásságának ismertetése a Matematikai Lapok 19. kötetének 221—235. lapjain található.

hogy a 2. lépéshez hasonlóan

$i; k+1; i_1, \ldots, i_{k+1}) := P_{r+1}(1; k; i_1, \ldots, i_{k-1}, P_{r+1}(1; 2; i_k, i_{k+1}))$

yerhetjük.

a t-re vonatkozó indukciót a 3. lépés teljes analógiájára végezhetjük bizonyítását lényegében befejeztük.

megmutatunk egy példát a Tétel egy speciális esetének használatára erzők bebizonyították a következő tételt:

Legyen k természetes szám, R pedig egy N dimenziós tégla! Ekkor létezik természetes szám, hogy tetszőleges módon k-színezve egy n dimenziós ér pontjait, keletkezik egyszínű, R-rel egybevágó idomot feszítő pont-

ítást az $N=2$ esetre végezzük, tetszőleges N-re ugyanígy lehet végrehajtani. nek az R téglalap oldalai c és d! Legyen továbbá $p := P_2(1; k; 2, 2, \ldots, 2)$! illetve A_2-vel a $(p-1)$ dimenziós euklideszi tér c, illetve d élű szabályos ! Megmutatjuk, hogy a $(2p-2)$ dimenziós euklideszi tér tetszőleges 2- esetén az $A_1 \times A_2$ ponthalmazból már ki tudunk választani R-rel egybevágó színű ponthalmazt. Ehhez rendezzük az (a_i, b_j) alakú vektorokkal repre- $\times A_2$ direktszorzat elemeit olyan $((c^1_{i_1}, c^2_{i_2})) = M$ kétdimenziós mátrixba A_j szimplex i_j-ik csúcsa. Mivel két pont távolsága az $A_1 \times A_2$ szorzatban z első koordinátában térnek el, c, ha a másodikban csak, akkor d, így az 2×2-es almátrixai éppen R-rel egybevágó ponthalmazokat reprezentálnak méreteinek választása miatt, ami éppen $p \times p$-es, elemeinek tetszőleges k- mellett van egyszínű 2×2-es almátrixa, így a bizonyítást befejeztük. (Ez ítás kicsit egyszerűbb is az eredetinél.)

DALOM

s P.: On extremal Problems of Graphs and Generalized Graphs, *Israel J. of Math.* 2 (1965) -190.
LWOOD, C. V.: Partitions of sets of matrices, *Discrete Math.* Vol. 13 N. 3 (1975. nov.) -277.
ős P.—GRAHAM, R. L.—MONTGOMERY, P.—ROTHSCHILD, B. L.—SPENCER, J.—STRAUSS, .: Euclidean Ramsey Theorems I., *J. of Comb. Theory* Ser A. 14 (1973) 341—363.
HAM, R. L.—LEEB, K.—ROTHSCHILD, B. L.: Ramsey's Theorem for a Class of Categories, *nced in Mathematics* 8 (1972) 417—433.
HAM, R. L.—ROTHSCHILD, B. L.: Ramsey's Theorem for n-parameter Sets, *Trans. A. M. S.* (1971) 257—292.
HAM, R. L.—ROTHSCHILD, B. L.: Ramsey's Theorem for n-dimensional arrays, *Bull. M. S.* 75 (1969) 418—422.
NCER, J. H.: Ramsey's Theorem for Spaces, Preprint.
RR, S. A.—ERDŐS P.—LOVÁSZ L.: On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria* Vol 1 76) 167—190.
ŠETŘIL, J. and RÖDL, V.: Ramsey property of graphs with forbidden complete subgraphs *Combinatorial T. (B)* 20 (1976) 243—249.
ŠETŘIL, J. and RÖDL, V.: Type theory of partition problems of graphs in *"Recent Advances Graph Theory"*, Academia, Prague 1975, 405—412.
OÁTAL, V.: On Finite Polarized Partition Relations, Canad. Math. Bull. 12 (1969) 321—326.

ДНА ТЕОРЕМА ТИПА РЕМСИ

ЕТЕР Л. ЭРДӦШ

RAMSEY TYPE THEOREM

. L. ERDŐS

PÁROS FOKSZÁMÚ REGULÁRIS GRÁFOK SZÖGPONT SZERINTI „EVOLÚCIÓJA"

DÉNES TAMÁS

Általában érdekes a gráfok körében azt a problémát vizsgálni, hogy azonos struktúrával rendelkező, de eltérő szögpont, illetve élszámú gráfok milyen transzformációval vihetők át egymásba.

Például egy Γ_n n szögpontú teljes gráf előállítható a Γ_{n-1} $n-1$ szögpontú teljes gráfból úgy, hogy hozzáveszünk egy szögpontot és azt Γ_{n-1} minden szögpontjával összekötjük éllel. Ugyanez a transzformáció bármely más fokszámú reguláris gráf-családnál nem vezet célhoz. Más aspektusból foglalkozott gráf evolúcióval [3]-ban Erdős Pál és Rényi Alfréd.

Jelen dolgozatban csak irányítatlan, páros fokszámú reguláris gráfokkal foglalkozunk.

A dolgozat első részében definiáljuk az evolúciós transzformációt és ezzel kapcsolatos egyszerű tételeket bizonyítunk be, a második és harmadik részben azokról gráfokról szólunk, amelyekre nem alkalmazható a transzformáció.

1. Definíció. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú egyszerű gráf és $p_i \in P, p_j \in P$ szomszédos szögpontok, valamint p olyan szögpont, amely p_i, p_j egyikével sem szomszédos. (P és E a Γ_n gráf szögpont, illetve élhalmazát jelöli.)

A p szögponttal végzett EC transzformáción értjük a következőt:

(1) $$EC: E \to E'$$

ahol

$$E' = E \setminus \{(p_i p_j)\} \cup \{(pp_i), (pp_j)\}$$

A továbbiakban jelöljük az összes páros reguláris gráfok halmazát $\mathscr{PR}$-rel, az rendre 2, 4, ..., k (k páros) fokszámú reguláris gráfok halmazát pedig rendre $\mathscr{PR}_2$, $\mathscr{PR}_4$, ..., $\mathscr{PR}_k$-val.

Ekkor nyilván teljesül a következő:

1. $\mathscr{PR} = \mathscr{PR}_2 \cup \mathscr{PR}_4 \cup \ldots \cup \mathscr{PR}_k \cup \ldots$
2. $\forall i \neq j$ (i, j páros) esetén $\mathscr{PR}_i \cap \mathscr{PR}_j = \emptyset$
3. $\forall \Gamma_{n,k} \in \mathscr{PR}$ gráfhoz $\exists! \mathscr{PR}_k : \Gamma_{n,k} \in \mathscr{PR}_k$

Tehát a $\mathscr{PR}$ halmaz egy osztályozásáról van szó.

2. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k} \in \mathscr{PR}_k$ tetszőleges n szögpontú, k-reguláris gráf. $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ és $\Gamma_{n+1} = (P \cup \{p\}, E')$, ahol $p \notin P$.

A p szögponttal végzett ET transzformáción értjük a p szögponttal végzett EC transzformációt, azaz legyenek $(p_1 p_2), (p_3 p_4), \ldots, (p_{k-1} p_k)$ $\Gamma_{n,k}$-beli élek,

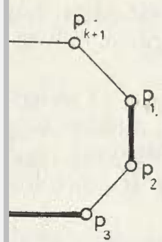
$$ET: \Gamma_{n,k} \to \Gamma_{n+1}$$

$E' = E \setminus \{(p_1p_2), (p_3p_4), \dots, (p_{k-1}p_k)\} \cup \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\}$

tel. *Legyen k tetszőleges páros szám. Minden $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráfra alkalmaz-anszformáció.*

NYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy $\Gamma_{n,k}$-ban létezik $k/2$ független él. A bizo-felhasználjuk G. A. Dirac [2] következő tételét:

gy egyszerű gráf minden szögpontjának foka legalább r $(r>1)$, akkor van egy legalább $r+1$ hosszúságú kör."



ábra

Jelöljük $\Gamma_{n,k}$ egy $k+1$ hosszúságú körét K-val (az idézett tétel alapján ilyen biztos van), ekkor például az 1. ábrán látható módon kiválasztva az éleket $((p_1p_2), (p_3p_4), \dots, (p_{k-1}p_k))$ egy pontosan $k/2$ független élből álló élhalmazt kapunk.

3. Definíció. Legyen $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathcal{PR}_k$, valamint $p \in P$ és jelöljük p_1p_2, $p_3p_4, \dots, p_{k-1}p_k$-val a p szomszédaiból alkotott, páronként nem szomszédos szögpontpárokat. Ekkor ET^{-1} transzformáción a következőt értjük:

(3) $\quad ET^{-1}: \Gamma_{n,k} \to \Gamma_{n-1} = (P', E'), \quad P' = P \setminus \{p\}$

$$E' = E \setminus \{(pp_1), (pp_2), \dots, (pp_k)\} \cup \{(p_1p_2), \dots, (p_{k-1}p_k)\}$$

finíció. Legyen $\Gamma_n = (P, E)$ n szögpontú gráf, $p \in P$ és $q_1, q_2, \dots, q_r$ a p Γ_n-beli szomszédai. A p által generált Γ_n-beli részgráfon (jelöljük ezt $')-vel) értjük Γ_n-nek azt a részgráfját, melyre teljesül, hogy $P' = \dots, q_r\}$ és $(q_iq_j) \in E' \Leftrightarrow (q_iq_j) \in E$.

finíció. Legyen $\Gamma_n \in \mathcal{PR}$ és $p \in \Gamma_n$. A p szögpont T-tulajdonságú, ha az rált Γ_n-beli részgráf komplementere tartalmaz 1-faktort.

tel. *Egy $\Gamma_{n,k} = (P, E) \in \mathcal{PR}_k$ gráfra akkor és csak akkor alkalmazható szformáció, ha létezik $p \in \Gamma_{n,k}$ T-tulajdonságú szögpontja.*

NYÍTÁS. Szükségesség: Az ET^{-1} transzformáció definíciójából követ-gy létezik $p \in \Gamma_{n,k}$ melynek szomszédaiból kiválaszthatók a p_1p_2, $_{k-1}p_k$ páronként nem szomszédos szögpontpárok. Ezek a $p_1, p_2, \dots, p_k$ kból alkotott $\Gamma_{n,k}$-beli részgráf komplementerében szomszédosak lesznek, gy 1-faktort alkotnak, hiszen bármely két szögpontpárnak sincs közös . Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy a p szögpont T-tulajdonságú. ndőség: Ebbe az irányba a bizonyítás pontosan az előző gondolatmenet ása.

tel. *Minden páros $k \geq 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráf, amelynek nincs ságú szögpontja.*

alens megfogalmazásban: Minden páros $k \geq 4$ számhoz létezik $\Gamma_{n,k} \in \mathcal{PR}_k$, y egyetlen $\Gamma_{n-1,k} \in \mathcal{PR}_k$ gráfból sem áll elő ET transzformációval.

NYÍTÁS. Legyen k tetszőleges $(k \geq 4)$ páros szám. Tekintsünk két $k+1$ $\Gamma^1_{k+1,k} = (P_1, E_1)$ és $\Gamma^2_{k+1,k} = (P_2, E_2)$ teljes gráfot. Legyenek $(p_{i_1}p_{j_1})$

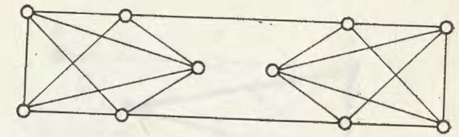
$(p_{i_2}p_{j_2}) \in E_2$, ekkor képezzük a következő $\Gamma_{n,k} = (P, E)$ gráfot

(4) $$P = P_1 \cup P_2$$

(5) $$E = E_1 \cup E_2 \setminus \{(p_{i_1}p_{j_1}), (p_{i_2}p_{j_2})\} \cup \{(p_{i_1}p_{i_2}), (p_{j_1}p_{j_2})\}$$

$k=4$ esetén $\Gamma_{n,k}$ a 2. ábrán látható.

bizonyítjuk, hogy az így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráfnak nincs T-tulajdonságú szögpontja. Mivel minden így konstruált $\Gamma_{n,k}$ gráf szimmetrikus, a bizonyítást elég az egyik (például $\Gamma^1_{k+1,k}$) szimmetrikus részgráf szögpontjaira elvégezni. Így két eset különböztethető meg:



2. ábra

a) p_{i_1}, p_{j_1} $\Big\}$ szögpontot
b) bármely másik $\Big\}$ vizsgáljuk

Az *a)* esetben jelöljük a p_{i_1} szomszédaiból alkotott részgráfot $G_1 = (A_1, B_1)$-el, ekkor

(6) $$A_1 = P_1 \cup \{p_{i_2}\} \setminus \{p_{i_1}\}$$

(7) $$B_1 = E_1 \setminus \{(p_{i_1}p_r) | \forall p_r \in P_1 \setminus \{p_{i_1}\}\}$$

Tehát $\bar{G}_1 = (A_1', B_1')$ a következő lesz

(8) $$A_1' = A_1$$

(9) $$B_1' = \{(p_{i_2}p_s) | \forall p_s \in P_1 \setminus \{p_{i_1}\}\}$$

gy $\bar{G}_1$ nem tartalmaz 1-faktort, vagyis p_{i_1} (és ugyanilyen megfontolásokból p_{i_2}, p_{j_1},) nem T-tulajdonságú.

A *b)* esetben legyen $p \neq p_{i_1} \neq p_{j_1}$ és $p \in P_1$, a p szomszédaiból alkotott részgráf $G_2 = (A_2, B_2)$ a következő:

(10) $$A_2 = P_1 \setminus \{p\}$$

(11) $$B_2 = E_1 \setminus \{(p_{i_1}p_{j_1}), (pp_r) | \forall p_r \in P_1 \setminus \{p\}\}$$

Tehát $\bar{G}_2 = (A_2', B_2')$ az alábbi lesz:

(12) $$A_2' = A_2$$

(13) $$B_2' = \{(p_{i_1}p_{j_1})\}$$

gy $\bar{G}_2$ szintén nem tartalmaz 1-faktort, vagyis a *b)* esethez tartozó szögpontok egyike em T-tulajdonságú. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

$k=4$ esetén egy G_1, $\bar{G}_1$, G_2, $\bar{G}_2$ a 3/a, b, c, d ábrákon látható. (A vastag vonallal húzott élek és pontok tartoznak rendre a megfelelő gráfokhoz.)

6. Definíció. Egy $\mathcal{PR}$-beli gráfot VP, vagy *szögpont prím* gráfnak nevezzünk, nincs T-tulajdonságú szögpontja.

A 3. tétel tehát így is megfogalmazható: A $\mathcal{PR}_4, \mathcal{PR}_6, \mathcal{PR}_8, \dots, \mathcal{PR}_k, \dots$ gráfosztályok mindegyike tartalmaz VP gráfot.

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett nem T-tulajdonságú egy szögpont. Felhasználjuk az alábbi ismert eredményt [1].

DOCKET ALARM

Explore Litigation Insights

Docket Alarm provides insights to develop a more informed litigation strategy and the peace of mind of knowing you're on top of things.

Real-Time Litigation Alerts

Keep your litigation team up-to-date with **real-time alerts** and advanced team management tools built for the enterprise, all while greatly reducing PACER spend.

Our comprehensive service means we can handle Federal, State, and Administrative courts across the country.

Advanced Docket Research

With over 230 million records, Docket Alarm's cloud-native docket research platform finds what other services can't. Coverage includes Federal, State, plus PTAB, TTAB, ITC and NLRB decisions, all in one place.

Identify arguments that have been successful in the past with full text, pinpoint searching. Link to case law cited within any court document via Fastcase.

Analytics At Your Fingertips

Learn what happened the last time a particular judge, opposing counsel or company faced cases similar to yours.

Advanced out-of-the-box PTAB and TTAB analytics are always at your fingertips.

API

Docket Alarm offers a powerful API (application programming interface) to developers that want to integrate case filings into their apps.

LAW FIRMS

Build custom dashboards for your attorneys and clients with live data direct from the court.

Automate many repetitive legal tasks like conflict checks, document management, and marketing.

FINANCIAL INSTITUTIONS

Litigation and bankruptcy checks for companies and debtors.

E-DISCOVERY AND LEGAL VENDORS

Sync your system to PACER to automate legal marketing.

WHAT WILL YOU BUILD? | **sales@docketalarm.com** | **1-866-77-FASTCASE**

fastcase®

Smarter legal research.